Complexes

1. Ensembles de points

Exercice 1

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

a) $|z|=1$;
b) $|z-2-i|=2$;
c) $|z-3|=|z-1-i|$.

Représenter ces ensembles de points dans le plan.

Solution de l'exercice 1

a) L'ensemble des points est le cercle de centre O et de rayon 1.
b) L'ensemble des points est le cercle de centre $I(2;1)$ et de rayon 2.
c) L'ensemble des points est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(3;0)$ et $B(1;1)$.

Exercice 2 (facultatif)

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

a) $|z|=3$;
b) $|z-3+2i|=4$;
c) $|z+2-i|=|z+3i|$.

Représenter ces ensembles de points dans le plan.

Solution de l'exercice 2

a) L'ensemble des points est le cercle de centre O et de rayon 3.
b) L'ensemble des points est le cercle de centre $I(3;-2)$ et de rayon 4.
c) L'ensemble des points est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(-2;1)$ et $B(0;-3)$.

Exercice 3 (pour la Maturita orale)

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Pour tout nombre complexe $z\neq -i$, on considère $z'=\frac{z-2-i}{z+i}$.

a) On pose $z=x+iy$ avec x et y réels.
   Ecrire la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
b) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
   Représenter cet ensemble de points dans le plan.
c) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   Représenter cet ensemble de points dans le plan.

Exercice 4 (facultatif)

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z=x+i\,y$ tel que: $(2y+3x-1)(y-3)(x+4)=0$.
Représenter cet ensemble de points dans le plan.

Solutions des exercices 3 et 4

Ex.1: a) $\mathrm{Re}(z')=\frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ et $\mathrm{Im}(z')=\frac{-2x+2y+2}{x^2+(y+1)^2}$.
b) (E) est la droite d'équation $y=x-1$ privée du point de coordonnées $(0;-1)$.
c) (F) est le cercle de centre $I(1;0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ privé du point de coordonnées $(0;-1)$.

Ex.2: L'ensemble des points est la réunion des trois droites d'équations respectives $y=\frac{-3}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=3$ et $x=-4$.

2. Factorisation – Exercices de la Maturita 2013

Exercice 1 - Maturita 2013 - Ici l'équation est à coefficients complexes !

Soit $P(z)=z^3-2\left(i+\sqrt{2}\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{2}\right)z-8i$ le polynôme à variable complexe z.

1°) Vérifier que $z_0=2i$ est une racine de P.

2°) Trouver les réels a, b et c tels que $P(z)=(z-2i)\left(az^2+bz+c\right)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $P(z)=0$.

Exercice 2 - Maturita 2013

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^4+\left(2-2\sqrt{3}\right)z^3+\left(8-4\sqrt{3}\right)z^2+\left(8-8\sqrt{3}\right)z+16=0$.

a) Montrer que (E) équivaut à $\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$.
b) En déduire les solutions de l'équation (E).
c) Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique.

Exercice 3 - Maturita 2013 - Ici l'équation est à coefficients complexes !

On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}$.
1°) Montrer que le nombre complexe $z_0=i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z)=0$.
2°) a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.
b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 4 - Maturita 2013

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) : $z^3-2z^2+12z+40=0$.

1°) Montrer que -2 est une solution de (E).

2°) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $z^3-2z^2+12z+40=(z+2)\left(az^2+bz+c\right)$.

3°) En déduire les solutions de l'équation (E).

Solution des exercices 1 à 4

Ex.1 1) $P(z_0)=\cdots=0$
2) $a=1$ et $b=-2\sqrt{2}$ et $c=4$
3) $S=\left\{2i;\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i;\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\right\}$

Ex.2 1) $\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)(z^2+2z+4)=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (E)$
2) $S=\left\{\sqrt{3}+i;\sqrt{3}-i;-1+\sqrt{3}\,i;-1-\sqrt{3}\,i\right\}$
3) $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$,
$-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $-1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\right)$

Ex.3 1) $P(z_0)=\cdots=0$
2) $a=-2$ et $b=2$
3) $S=\left\{i\sqrt{2};1+\mathrm{i};1-i\right\}$

Ex.4 1) Si $z=-2$ alors $z^3-2z^2+12z+40=(-2)^3-2(-2)^2+12(-2)+40=\cdots=0$.
2) $a=1$ et $b=-4$ et $c=20$
3) $S=\{-2;2+4i;2-4i\}$

3. Angle orienté de deux vecteurs – Avec des exos des Maturitas écrites de 2014 et 2015

Exercice 1

Démontrez la propriété suivante :

$$\text{Si}\begin{cases}\text{le plan est muni d'un repère orthonormal direct } (O;\vec{u},\vec{v})\\ \text{le points } A \text{ n'est pas égal au point } B\\ \text{le points } C \text{ n'est pas égal au point } D\end{cases}$$

alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ est égale à l'argument principal de $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$.

Exercice 2

Démontrez la propriété suivante.

$$\text{Si}\begin{cases}\text{le plan est muni d'un repère orthonormal direct } (\mathrm{O};\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}})\\ \text{le points A n'est pas égal au point B}\end{cases}$$

alors $\left|\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right| = \frac{CD}{AB}$.

Solution de l'exercice 1

Dans cette démonstration, $AP(\ldots)$ signifie l'argument principal de ...
$MP(\ldots)$ signifie la mesure principale de ...

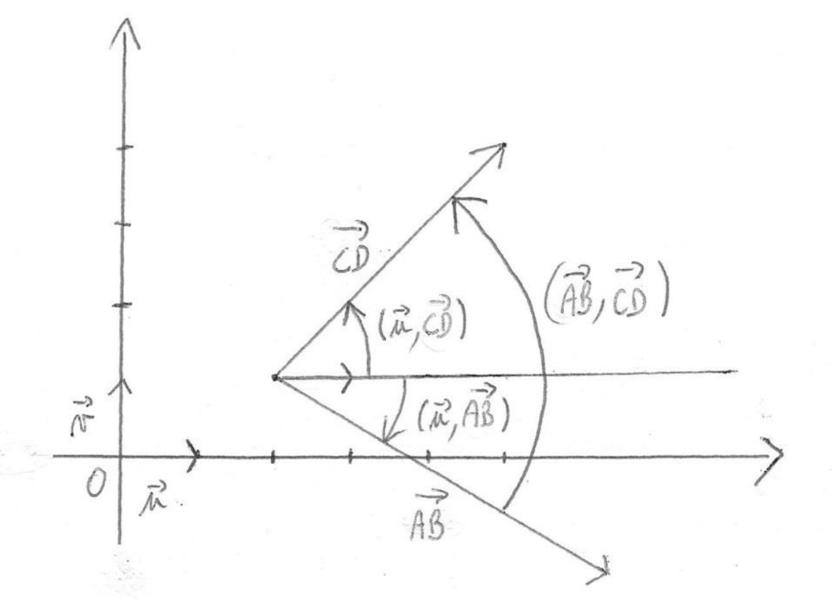
$AP(z_D - z_C) = AP\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) = MP\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right)$.

$AP(z_B - z_A) = AP\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) = MP\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$.

Comme $AP\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) \in \left]-\pi;\pi\right]$ et $AP\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) \in \left]-\pi;\pi\right]$, alors $AP\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) - AP\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) \in \left]-2\pi;2\pi\right[$.

CAS 1: Si $AP\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) - AP\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) \in \left]-\pi;\pi\right]$ alors

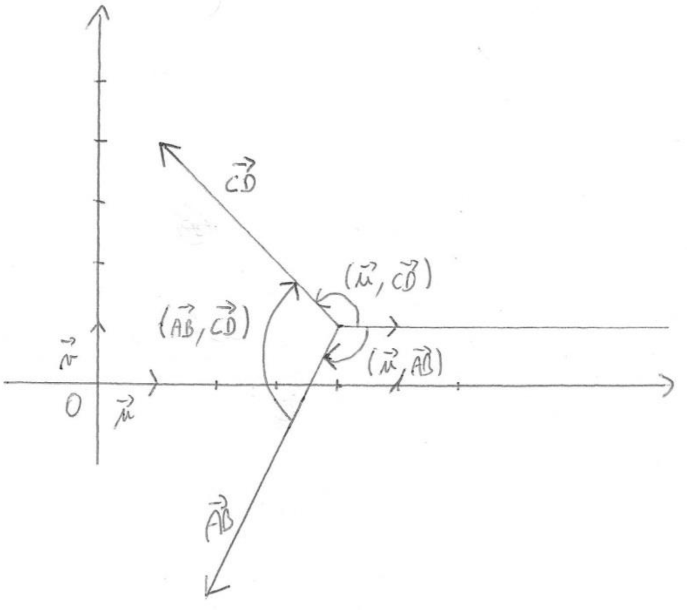
$$\begin{aligned} AP\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) &= AP\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) - AP\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right)\\ &= MP\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right) - MP\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)\\ &= MP\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right).\end{aligned}$$



Dans le dessin ci-dessus: $MP\left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right) = 45°$, $MP\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right) = -30°$, $MP\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 45° - (-30°) = 70°$.

CAS 2: Si $AP(z_{\overrightarrow{CD}}) - AP(z_{\overrightarrow{AB}}) \in]\pi; 2\pi[$ alors $AP\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$

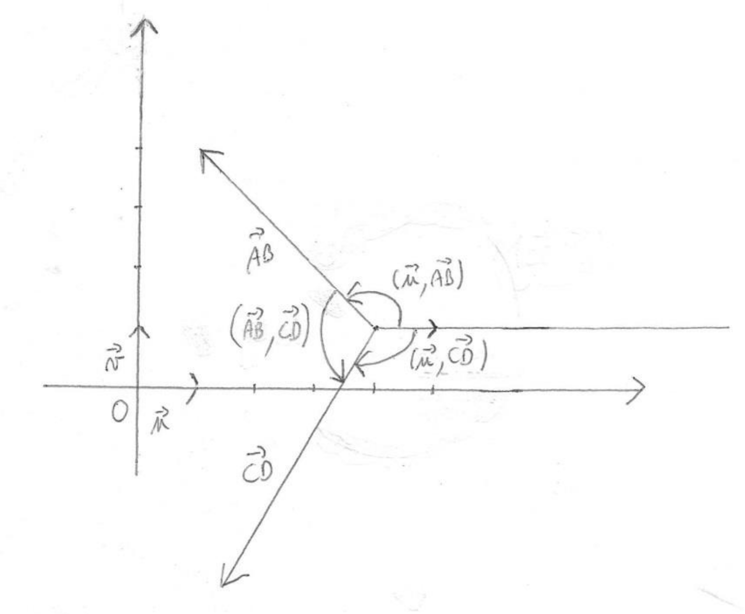
$$= AP(z_{\overrightarrow{CD}}) - AP(z_{\overrightarrow{AB}}) - 2\pi$$
$$= MP(\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - MP(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) - 2\pi$$
$$= MP(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}).$$



Dans le dessin ci-dessus: $MP(\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = 135°$, $MP(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = -120°$,
$MP(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 135° - (-120°) - 360° = 255° - 360° = -105°$.

CAS 3: Si $AP(z_{\overrightarrow{CD}}) - AP(z_{\overrightarrow{AB}}) \in]-2\pi; -\pi]$ alors $AP\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$

$$= AP(z_{\overrightarrow{CD}}) - AP(z_{\overrightarrow{AB}}) + 2\pi$$
$$= MP(\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - MP(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + 2\pi$$
$$= MP(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}).$$



Dans le dessin ci-dessus: $MP(\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = -120°$, $MP(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = 135°$,
$MP(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -120° - (135°) + 360° = -255° + 360° = 105°$.

Solution de l'exercice 2

$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \frac{|z_{\overrightarrow{CD}}|}{|z_{\overrightarrow{AB}}|} = \frac{CD}{AB}.$

Exercice 3 (2015)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d´unité graphique ***1cm***.
On considère le point A et F d´affixes respectives $z_A = 1$ et $z_F = -2i$.
Soit C et D les points d´affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3})$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3})$.

1) Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.
2) Calculer $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$. Donner la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
3) En déduire que la droite (AF) est une médiatrice du triangle DAC.
4) Placer les points A, C, D et F.

Exercice 4 (2015)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ **d'unité graphique 2 cm**.
Soient A, B et F les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2i, z_B = 3 - 2i, z_E = 1.$$

1) Placer A, B et E dans le plan complexe.
2) Prouver que $\frac{z_A - z_E}{z_B - z_E} = i$.
3) En déduire la nature du triangle ABE.

Exercice 5 (2015)

Soit le plan complexe (P) muni d´un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d´unité graphique 2 cm. On note A, B, C les points d´affixes respectives $a = 2$, $b = -1 - i\sqrt{3}$, $c = 2 - 3i$.

1) Réécrire b sous forme exponentielle.
2) Construire les points A, B, C dans le plan (P). On complétera la figure au fur et à mesure de l´exercice.
3) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire la mesure de l'angle géométrique au sommet A du triangle ABC.

Exercice 6 (2014)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique *2 cm*.

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $z_A = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$,
$z_C = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ et $z_D = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

1) Montrer que les points *A*, *B*, *C* et *D* sont sur un même cercle de centre *O* et dont on précisera le rayon. Construire ce cercle.
2) Construire les points *A*, *B*, *C* et *D*.
3) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$.
4) En déduire la nature du triangle *BCD*.

Exercice 7 (2014)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 *cm*, on considère les points *A*, *E* et *F* d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_E = -1+\sqrt{3}$ et $z_F = -\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

1) Montrer que $\frac{z_A - z_F}{z_A - z_E} = \frac{4}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$.
2) En déduire un argument de $\frac{z_A - z_F}{z_A - z_E}$.
3) Que peut-on en déduire pour les points *A*, *E* et *F* ? Justifier.
4) Placer les points *A* et *E* et *F* dans le plan.

Solution des exercices 3 à 7

Ex. 3: 1) $\frac{z_C + z_D}{2} = \cdots = z_F$

2) $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -\sqrt{3}i$

3) La droite (AF) est une médiatrice du triangle DAC
car (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$
car $\begin{cases} F \ est \ le \ milieu \ du \ segment \ [CD] \\ (AF) \perp (CD) \ car \ \begin{cases} \left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FC}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ F \in [CD] \end{cases} \end{cases}$.

Ex.4:

3) $MesurePrincipale\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{EA}{EB} = 1$, d'où ABE est un triangle isoscèle rectangle en E.

Ex. 5: 1) $b = 2\, e^{-\frac{2}{3}\pi\, i}$

3) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$; $MesurePrincipale\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

Ex. 6 :1) $OA = OB = OC = OD = 3$; *A*, *B*, *C* et *D* sont sur le cercle de centre *O* et de rayon 3.

3) $\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $ArgumentPrincipal\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$.

4) Le triangle BCD est rectangle en C car $MesurePrincipale\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ex. 7 :2) $ArgumentPrincipal\left(\frac{z_A - z_F}{z_A - z_E}\right) = 0$.

3) Les points A, E et F sont alignés car $MesurePrincipale\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{FA}\right) = 0$.

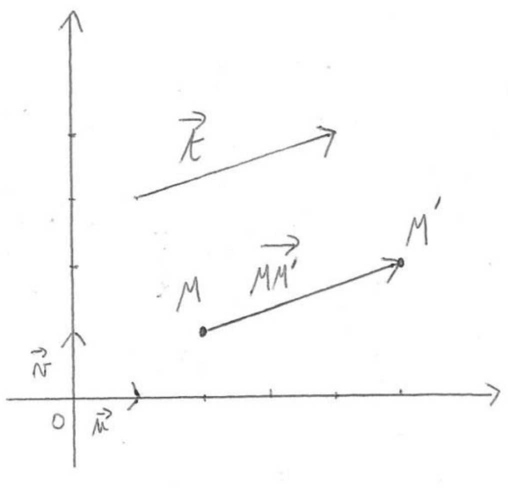
4. Transformations

TRANSLATION

Soit z' l'affixe du point M'
z l'affixe du point M
t l'affixe de la translation de vecteur $\vec{t}(t_x;\ t_y)$.

Alors:

$z' = z + t \quad \Leftrightarrow z' - z = t$
$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{t}}$
$\Leftrightarrow M'$ est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{t}$.

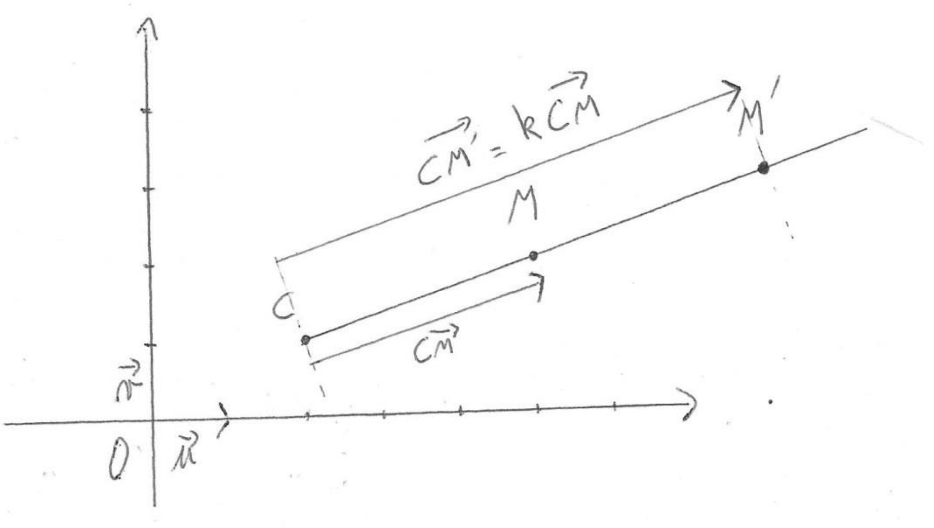


HOMOTHÉTIE

Soit z' l'affixe du point M'
z l'affixe du point M
z_c l'affixe du point C
k un réel non nul.

Alors:

$z' - z_c = k(z - z_c) \quad \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{CM'}} = k\, z_{\overrightarrow{CM}}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM'} = k\, \overrightarrow{CM}$
$\Leftrightarrow M'$ est l'image du point M par l'homothétie de centre C et de rapport k.



ROTATION

Soit z' l'affixe du point M'
z l'affixe du point M
z_c l'affixe du point C
θ un réel.

Alors:

Si $z \neq z_c$ alors

$z' - z_c = e^{i\theta}(z - z_c) \quad \Leftrightarrow \frac{z'-z_c}{z-z_c} = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{CM'}{CM} = 1 \\ MesurePrincipale\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) = ArgumentPrincipal\left(e^{i\theta}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ M' est l'image du point M par la rotation de centre C et d'angle θ.

Si $z = z_c$ alors

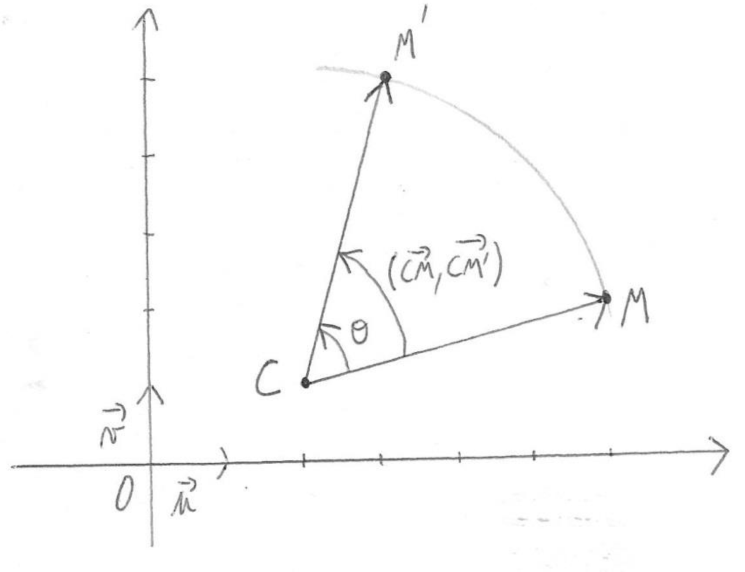
$z' - z_c = e^{i\theta}(z - z_c) \quad \Leftrightarrow z' - z_c = 0$

$\Leftrightarrow z' = z_c = z$

$\Leftrightarrow$ M' est l'image du point M par la rotation de centre C et d'angle θ.

On a donc toujours:

$z' - z_c = e^{i\theta}(z - z_c) \Leftrightarrow$ M' est l'image du point M par la rotation de centre C et d'angle θ.



Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soient le point $D(-1+2i)$ et le point $\Omega(2-i)$.

a) Placer les points D et Ω dans le plan.
b) Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{t}(3-2i)$.
   Calculer l'affixe du point D' l'image du point D par cette transformation.
   Construire le point D' dans le plan.
c) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.
   Calculer l'affixe du point D'' l'image du point D par cette transformation.
   Construire le point D'' dans le plan.
d) Déterminer l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω.
   Calculer l'affixe du point D''' l'image du point D par cette transformation.
   Construire le point D''' dans le plan.
e) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Calculer l'affixe du point D'''' l'image du point D par cette transformation.
   Construire le point D'''' dans le plan.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Déterminer, dans chacun des cas suivants, la transformation géométrique qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que:

a) $z'+z=0$
b) $z'-z=2i$
c) $z'+3-2i=i(z+3-2i)$
d) $z'-2+i=-2(z-2+i)$

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

a) Soit t la translation qui applique le point A d'affixe $4-5i$ sur le point A' d'affixe $-3+i$.
   Déterminer le vecteur $\vec{t}$ de cette translation. Déterminer $t(z)$.
   Dans le plan, placer les points A, A' et représenter le vecteur $\vec{t}$.
b) Soit r la rotation de centre $C(2+3i)$ et d'angle θ avec $\theta \in]-\pi;\pi]$ qui applique le point B d'affixe $-2+i$ sur le point B' d'affixe $4+\sqrt{3}+\left(4-2\sqrt{3}\right)i$.
   Déterminer l'angle θ de cette rotation. Déterminer $r(z)$.
   Construire dans le plan les points C, B et B'.
c) Soit r la rotation d'angle $\frac{-\pi}{4}$ qui applique le point D d'affixe $2+i$ sur le point D' d'affixe $4-i$.
   Déterminer le centre E de cette rotation. Déterminer $r(z)$.
   Placer dans le plan les points E, D et D'.
d) Soit h l'homothétie de centre $G(1+4i)$ qui applique le point F d'affixe $2+6i$ sur le point F' d'affixe $-2-2i$.
   Déterminer le rapport de cette homothétie. Déterminer $h(z)$.
   Construire dans le plan les points G, F et F'.
e) Soit h la symétrie centrale qui applique le point H d'affixe $3+2i$ sur le point H' d'affixe $-2+4i$.
   Déterminer le centre I de cette symétrie centrale. Déterminer $h(z)$.
   Construire dans le plan les points I, H et H'.

Exercice 4 (facultatif)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soient le point $D(2-2i)$ et le point $\Omega(1-2i)$.

a) Placer les points D et Ω dans le plan.
b) Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où $A(-2i)$ et $B(2+i)$.
Calculer l'affixe du point D' l'image du point D par cette transformation.
Construire le point D' dans le plan.
c) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.
Calculer l'affixe du point D'' l'image du point D par cette transformation.
Construire le point D'' dans le plan.
d) Déterminer l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω.
Calculer l'affixe du point D''' l'image du point D par cette transformation.
Construire le point D''' dans le plan.
e) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.
Calculer l'affixe du point D''' l'image du point D par cette transformation.
Construire le point D''' dans le plan.

Exercice 5 (facultatif)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Déterminer, dans chacun des cas suivants, la transformation géométrique qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que:

a) $z'-2=-z+2$
b) $z'=z-3-i$
c) $z'-3i=-i(z-3i)$
d) $z'+4+3i=\frac{1}{2}(z+4+3i)$
e) $z'-2+3i=-z+2-3i$
f) $z'=z+4i$
g) $z'=iz$
h) $z'=\frac{-1}{3}z$

Exercice 6 (facultatif)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

a) Soit t la translation qui applique le point A d'affixe $2+3i$ sur le point A' d'affixe $-2-2i$.
Déterminer le vecteur $\vec{t}$ de cette translation. Déterminer $t(z)$.
Dans le plan, placer les points A, A' et représenter le vecteur $\vec{t}$.
b) Soit r la rotation de centre $C(6-i)$ et d'angle θ avec $\theta \in]-\pi;\pi]$ qui applique le point B d'affixe $-2-i$ sur le point B' d'affixe $6-4\sqrt{3}+3i$.
Déterminer l'angle θ de cette rotation. Déterminer $r(z)$.
Construire dans le plan les points C, B et B'.
c) Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui applique le point D d'affixe $5+2i$ sur le point D' d'affixe $-2+5i$.
Déterminer le centre E de cette rotation. Déterminer $r(z)$.
Construire dans le plan les points E, D et D'.
d) Soit h l'homothétie de centre $G(-2+3i)$ qui applique le point F d'affixe $4+i$ sur le point F' d'affixe $1+2i$.
Déterminer le rapport de cette homothétie. Déterminer $h(z)$.
Construire dans le plan les points G, F et F'.
e) Soit h la symétrie centrale qui applique le point H d'affixe $-2+2i$ sur le point H' d'affixe $2+2i$.
Déterminer le centre I de cette symétrie centrale. Déterminer $h(z)$.
Construire dans le plan les points I, H et H'.

Solutions des exercices 1 à 6

Ex. 1:

b) $z' = z + 3 - 2i$, $z_{D'} = 2$
c) $z' - (2 - i) = 2\big(z - (2 - i)\big)$, $z_{D''} = -4 + 5i$
d) $z' - (2 - i) = -\big(z - (2 - i)\big)$, $z_{D'''} = 5 - 4i$
e) $z' - (2 - i) = e^{i\frac{\pi}{4}}\big(z - (2 - i)\big)$, $z_{D'''} = 2 - 3\sqrt{2} - i$

Ex. 2:

a) C'est la symétrie centrale de centre O, c'est-à-dire l'homothétie de rapport -1 et de centre O.
b) C'est la translation de vecteur $\vec{t}(2i)$.
c) C'est la rotation de centre $A(-3 + 2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
d) C'est l'homothétie de rapport -2 et de centre $B(2 - i)$.

Ex. 3:

a) $\vec{t}(-7 + 6i)$, $t(z) = z - 7 + 6i$.
b) $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $r(z) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - 2 - 3i) + 2 + 3i$.
c) $z_E = 2 - \sqrt{2} - \big(1 + \sqrt{2}\big)i$, $r(z) = e^{i\frac{-\pi}{4}}(z - z_E) + z_E$
d) $k = -3$, $h(z) = -3\big(z - (1 + 4i)\big) + 1 + 4i$.
e) $z_I = \frac{1}{2} + 3i$, $h(z) = -(z - z_I) + z_I$.

Ex. 4:

a) $z' = z + 2 + 3i$, $z_{D'} = 4 + i$
b) $z' - (1 - 2i) = -\frac{1}{2}\big(z - (1 - 2i)\big)$, $z_{D''} = \frac{1}{2} - 2i$
c) $z' - (1 - 2i) = -\big(z - (1 - 2i)\big)$, $z_{D'''} = -2i$
d) $z' - (1 - 2i) = -i\big(z - (1 - 2i)\big)$, $z_{D'''} = 1 - 3i$

Ex. 5:

a) C'est la symétrie centrale de centre $A(2)$, c'est-à-dire l'homothétie de rapport -1 et de centre $A(2)$.
b) C'est la translation de vecteur $\vec{t}(-3 - i)$.
c) C'est la rotation de centre $A(3i)$ et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.
d) C'est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre $B(-4 - 3i)$.
e) C'est la symétrie centrale de centre $C(2 - 3i)$, c'est-à-dire l'homothétie de rapport -1 et de centre $C(2 - 3i)$.
f) C'est la translation de vecteur $\vec{t}(4i)$.
g) C'est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
h) C'est l'homothétie de rapport $\frac{-1}{3}$ et de centre O.

Ex. 6:

a) $\vec{t}(-4 - 5i)$, $t(z) = z - 4 - 5i$.
b) $\theta = \frac{-\pi}{6}$, $r(z) = e^{i\frac{-\pi}{6}}\big(z - (6 - i)\big) + 6 - i$.
c) $z_E = 0$, $r(z) = i\,z$
d) $k = \frac{1}{2}$, $h(z) = \frac{1}{2}\big(z - (-2 + 3i)\big) - 2 + 3i$.
e) $z_I = 2i$, $h(z) = -(z - z_I) + z_I$.

Exercice 7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Compléter le tableau ci-dessous.

Transformation	Écriture complexe
Translation de vecteur d'affixe $-3i$.	
Symétrie de centre Ω d'affixe $w = 2 + 4i$.	
Homothétie de centre $\Omega(3 - 2\mathrm{i})$ et de rapport -2.	
Rotation de centre $\Omega(-3\mathrm{i})$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.	
	$z' + 1 - 3i = -4(z + 1 - 3i)$
	$z' - 2i = i(z - 2i)$
	$z' - 2 - 3i = -(z - 2 - 3i)$
	$z' = z - 3$
Homothétie de centre $\Omega(0)$ et de rapport 2.	
Rotation de centre $\Omega(3)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.	
	$z' = z + 3 - 4i$
	$z' + 2 - 2i = -(z + 2 - 2i)$
Symétrie d'axe $(O; \vec{u})$.	
	$z' = -\bar{z}$

Solution de l'exercice 7

Transformation	Écriture complexe
Translation de vecteur d'affixe $-3i$.	$z' = z - 3i$
Symétrie de centre Ω d'affixe $w = 2 + 4i$.	$z' - (2 + 4i) = -(z - (2 + 4i))$
Homothétie de centre $\Omega(3 - 2\mathrm{i})$ et de rapport -2.	$z' - (3 - 2i) = -2(z - (3 - 2i))$
Rotation de centre $\Omega(-3\mathrm{i})$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.	$z' + 3i = e^{i\frac{-2\pi}{3}}(z + 3i)$
Homothétie de centre $\Omega(-1 + 3\mathrm{i})$ et de rapport -4.	$z' + 1 - 3i = -4(z + 1 - 3i)$
Rotation de centre $\Omega(2\mathrm{i})$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.	$z' - 2i = i(z - 2i)$
Symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = 2 + 3i$.	$z' - 2 - 3i = -(z - 2 - 3i)$
Translation de vecteur d'affixe -3.	$z' = z - 3$
Homothétie de centre $\Omega(0)$ et de rapport 2.	$z' = 2\,z$
Rotation de centre $\Omega(3)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.	$z' - 3 = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - 3)$
Translation de vecteur d'affixe $3 - 4i$.	$z' = z + 3 - 4i$
Symétrie centrale de centre d'affixe $-2 + 2i$.	$z' + 2 - 2i = -(z + 2 - 2i)$
Symétrie d'axe $(O; \vec{u})$.	$z' = \bar{z}$
Symétrie d'axe $(O; \vec{v})$.	$z' = -\bar{z}$

5. Distances et aires avec les transformations

Rappel: La translation, la symétrie centrale et la rotation conservent les distances et les aires.
L'homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$ et les aires par k^2.

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$. Soient le point $\Omega(2+i)$ et le cercle $(\mathcal{C})$: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2$.

a) Donner les coordonnées de I, le centre du cercle $(\mathcal{C})$.
Donner le rayon r du cercle $(\mathcal{C})$ en unités de longueur et ensuite en cm.
Calculer l'aire de $(\mathcal{C})$ en $u.a.$ et ensuite en cm^2.
Placer le point Ω et le cercle $(\mathcal{C})$ dans le plan.

b) Déterminer l'écriture complexe de la translation d'affixe $\left(-2+\frac{i}{2}\right)$.
Soit $(\mathcal{C}')$ l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par cette translation.
Déterminer les coordonnées de I', le centre du cercle $(\mathcal{C}')$.
Donner le rayon r' du cercle $(\mathcal{C}')$ en unités de longueur et ensuite en cm.
Déterminer l'équation réduite du cercle $(\mathcal{C}')$.
Calculer l'aire de $(\mathcal{C}')$ en $u.a.$ et ensuite en cm^2.
Construire le point I' et le cercle $(\mathcal{C}')$ dans le plan.

c) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
Soit $(\mathcal{C}'')$ l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par cette homothétie.
Déterminer les coordonnées de I'', le centre du cercle $(\mathcal{C}'')$.
Donner le rayon r'' du cercle $(\mathcal{C}'')$ en unités de longueur et ensuite en cm.
Déterminer l'équation réduite du cercle $(\mathcal{C}'')$.
Calculer l'aire de $(\mathcal{C}'')$ en $u.a.$ et ensuite en cm^2.
Construire le point I'' et le cercle $(\mathcal{C}'')$ dans le plan.

d) Déterminer l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω.
Soit $(\mathcal{C}''')$ l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par cette symétrie centrale.
Déterminer les coordonnées de I''', le centre du cercle $(\mathcal{C}''')$.
Donner le rayon r''' du cercle $(\mathcal{C}''')$ en unités de longueur et ensuite en cm.
Déterminer l'équation réduite du cercle $(\mathcal{C}''')$.
Calculer l'aire de $(\mathcal{C}''')$ en $u.a.$ et ensuite en cm^2.
Construire le point I''' et le cercle $(\mathcal{C}''')$ dans le plan.

e) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.
Soit $(\mathcal{C}'''')$ l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par cette rotation.
Déterminer les coordonnées de I'''', le centre du cercle $(\mathcal{C}'''')$.
Donner le rayon r'''' du cercle $(\mathcal{C}'''')$ en unités de longueur et ensuite en cm.
Déterminer l'équation réduite du cercle $(\mathcal{C}'''')$.
Calculer l'aire de $(\mathcal{C}'''')$ en $u.a.$ et ensuite en cm^2.
Construire le point I'''' et le cercle $(\mathcal{C}'''')$ dans le plan.

Solution de l'exercice 1

a) $I\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i\right)$, $r=\frac{5}{4}=\frac{5}{2}\ cm$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{C})}=\frac{25}{16}\pi\ u.a.=\frac{25}{4}\pi\ cm^2$

b) $z'=z-2+\frac{i}{2}$, $I'\left(\frac{3}{2}+2i\right)$, $r'=r$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{C}')}=\mathcal{A}_{(\mathcal{C})}$

c) $z''-(2+i)=-2\big(z-(2+i)\big)$, $I''(-1)$, $r''=2\,r$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{C}'')}=4\,\mathcal{A}_{(\mathcal{C})}$

d) $z'''-(2+i)=-\big(z-(2+i)\big)$, $I'''\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$, $r'''=r$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{C}''')}=\mathcal{A}_{(\mathcal{C})}$

e) $z''''-(2+i)=-i(z-(2+i))$, $I''''\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\right)$, $r''''=r$, $\mathcal{A}_{(\mathcal{C}'''')}=\mathcal{A}_{(\mathcal{C})}$

6. Maturitas écrites de 2014 et 2015

Exercice 1 (2015)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d´unité graphique ***1cm***.
On considère les points A et B d´affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3 + 4i$.
Soit C et D les points d´affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i\left(-2+\sqrt{3}\right)$.

5) Montrer que l´image du point B par la rotation de centre A et d´angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.
6) En déduire que les points B et D sont sur un cercle $(\mathcal{C})$ de centre A dont on déterminera le rayon.
7) Soit F, l´image du point A par l´homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
   a. Montrer que l´affixe z_F du point F est $-2i$.
   b. Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.
   c. Calculer $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$. Donner la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
   d. En déduire que la droite (AF) est une médiatrice du triangle DAC.
8) Construire les points A, B et F.
   En utilisant la rotation mentionnée dans l´exercice, construire le point D.
   Ensuite, construire le point C.
   Laisser les traits de construction apparents.

Exercice 2 (2015)

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 6z + 13 = 0$.
   b. Déterminer les réels a et b tels que
   $$\forall\, z \in \mathbb{C}: z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z-3)(z^2 + az + b).$$
   c. En déduire les solutions de l'équation $z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ **d'unité graphique 2 cm**.
   Soient A, B, E et F les points d'affixes respectives :
   $$z_A = 3 + 2i, z_B = 3 - 2i, z_E = 1, z_F = 3.$$
   1) Placer A, B, E et F dans le plan complexe.
   2) Prouver que $\frac{z_A - z_E}{z_B - z_E} = i$.
   3) En déduire la nature du triangle ABE.

3. Soit h l'homothétie de centre B telle que $h(A) = F$.
   1) Pour tout point M d'affixe z, on note z' l'affixe de $M' = h(M)$.
      Exprimer z' en fonction de z.
   2) Déterminer z_I l'affixe du point $I = h(E)$. Placer le point I.

Exercice 3 (2015)

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées individuellement.

Partie A:

1) Montrer que $z_0 = 2$ est une racine évidente du polynôme
$$P(z) = z^3 + 2\sqrt{3}\, i\, z^2 - 2z^2 - 4z - 4\sqrt{3}\, i\, z + 8.$$
2) Résoudre dans l´ensemble des nombres complexes l´équation
$$z^3 + 2\sqrt{3}\, i\, z^2 - 2z^2 - 4z - 4\sqrt{3}\, i\, z + 8 = 0.$$

Partie B:

Soit le plan complexe (P) muni d´un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d´unité graphique 2 cm. On note A, B, C les points d´affixes respectives $a = 2$, $b = -1 - i\sqrt{3}$, $c = 2 - 3i$.

4) Réécrire b sous forme exponentielle.
5) Construire les points A, B, C dans le plan (P). On complétera la figure au fur et à mesure de l´exercice.
6) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire la mesure de l'angle géométrique au sommet A du triangle ABC.
7) Soit r la rotation de centre A et d´angle $-\frac{\pi}{6}$.
   a) Donner l´écriture complexe de la rotation r.
   b) Déterminer l´affixe du point C', l´image du point C par r. Placer C.
8) Que représente la droite (AC') pour le triangle ABC?

Exercice 4 (2015)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère, dans l´ensemble des nombres complexes, l´équation suivante:
(E): $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1) Montrer que 2 est une solution de (E), puis que (E) peut s´écrire sous la forme:
   $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b et c sont des réels que l´on déterminera.
2) En déduire les solutions de l´équation (E) sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Placer les points A, B et D d´affixes respectives: $z_A = -2 - 2i$ $z_B = 2$ $z_D = -2 + 2i$.
2) Calculer l´affixe z_C du point C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.
3) Soit E l´image du point C par la rotation de centre B et d´angle $\frac{-\pi}{2}$ et F l´image de C par la rotation de centre D et d´angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Vérifier par calcul que l'affixe du point E est $z_E = 6$, et que l'affixe du point F est $z_F = -4 + 6i$.
   b) Placer les points E et F.
4)
   a) Vérifier que $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.
   b) En déduire la nature du triangle AEF.

Exercice 5 (2014)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit $f(z)=z^4-9z^2+81$ un polynôme défini sur $\mathbb{C}$.

1°) Vérifier que $f(z)=\left(z^2+3\sqrt{3}z+9\right)\left(z^2-3\sqrt{3}z+9\right)$.

2°) Déterminer les solutions de l'équation $f(z)=0$.

Partie B

1°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique *2 cm*.

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $z_A=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$, $z_B=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$,

$z_C=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ et $z_D=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

a) Montrer que les points *A*, *B*, *C* et *D* sont sur un même cercle de centre *O* et dont on précisera le rayon.

Construire ce cercle.

b) Construire les points *A*, *B*, *C* et *D*.

2°) a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}$.

b) En déduire la nature du triangle *BCD*.

3°) On note *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui à tout point M d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe z'.

a) Donner l'écriture complexe de *r*.

b) Montrer que le point *A* est l'image du point *B* par *r*.

Exercice 6 (2014)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 3\sqrt{3}z + 9 = 0$.

On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées, z_1 étant la solution de partie imaginaire positive.

2°) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 et écrire leur forme trigonométrique.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité 1 *cm*. On considère les points *A* et *B* d'affixes respectives $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1°) a) Démontrer que *A* et *B* sont situés sur le cercle (Γ) de centre *O* dont on précisera le rayon.

b) Placer les points *A* et *B*. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2°) On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

a) Déterminer la nature de la transformation f et préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer la forme algébrique de z_A et z_B.

c) Soit A' l'image de *A* par *f*. Vérifier que l'affixe de A' est $z_{A'} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

d) Déterminer un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_{A'} - z_A}$. En déduire la nature du triangle $A'AB$.

Exercice 7 (2014)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation $(E): z^4 + 4 = 0$ où z est un nombre complexe.

1°) Soit le nombre $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer une forme trigonométrique et la forme algébrique de z_0 et montrer que z_0 est solution de (E) .

2°) Montrer que (E) est équivalente à $(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2) = 0$.

3°) En déduire les autres solutions de (E). Donner les résultats sous forme algébrique.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 *cm*, on considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = -1+i$, $z_C = -1-i$ et $z_D = 1-i$.

Soit *r* la rotation de centre *C* et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ qui à tout point M d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe z' .

On appelle *E* l'image du point *B* par *r* et *F* l'image du point *D* par *r*.

1°) Déterminer l'écriture complexe de la rotation *r*.

2°) a) Démontrer que $z_E = -1+\sqrt{3}$ et $z_F = -\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

b) Montrer que $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{4}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$. En déduire un argument de $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$.

Que peut-on en déduire pour les points *A*, *E* et *F* ? Justifier.

Exercice 8 (2014)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $(E) : z^3 - 2z^2 + 12z + 40 = 0$.

1°) Montrer que -2 est une solution de (E).

2°) Déterminer les nombres réels *a*, *b* et *c* tels que $z^3 - 2z^2 + 12z + 40 = (z+2)(az^2 + bz + c)$.

3°) En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 *cm*.

1°) Placer les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = 2+4i$, $z_B = 2-4i$ et $z_C = -2$.
On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2°) a)Vérifier que $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$.

b) En déduire la nature du triangle *ABC*. Justifier.

3°) Soit *r* la rotation de centre *A* et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

a) Montrer que l'image du point *C* par *r* est le point *D* d'affixe $z_D = 2 + 4\left(1-\sqrt{2}\right)i$.

b) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.
c) Montrer que les points *A*, *B* et *D* sont alignés.
d) Déterminer le rapport de l'homothétie *h* de centre *A* qui transforme *D* en *B*.

7. Maturitas écrites de 2018

Exercice 1 (2018)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$. On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, le point M_2 d'affixe $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et le point A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Déterminer l'affixe z_3 du point M_3, image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.
   b. Déterminer l'affixe z_4 du point M_4, image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   c. Placer dans le plan les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   On complètera la figure au fur et à mesure de l'‘exercice.
3)
   a. Prouver que le point I, milieu du segment $[M_3M_4]$ a pour affixe:
   $$z_I = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$
   b. Déterminer l'affixe z_5 du point M_5, le symétrique de M_1 par rapport à I.
   c. Montrer que $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} = -i$.
   d. En déduire que $M_1M_3M_5M_4$ est un carré.

Exercice 2 (2018)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d´unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère le polynôme de variable complexe z :

$$P(z) = z^3 - \left(2\sqrt{3} + \sqrt{3}\,i\right) z^2 + (4 + 6i)\,z - 4\sqrt{3}\,i \ .$$

1) Démontrer que $\sqrt{3}\,i$ est une racine de P.
2) Montrer que $P(z) = (z - \sqrt{3}\,i)(z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4)$.
3) En déduire les solutions de l´équation $P(z) = 0$.

Partie B

On considère les points A d´affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu du segment $[OB]$ d´affixe z_C.

1) Vérifier que l´affixe de C est $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et déterminer une forme trigonométrique pour chacun des nombres complexes z_A, z_B et z_C.
2) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan.
3) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
4) Soit D l´image de C par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et E l´image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$.
   Placer les points D et E sur la figure.
5) Déterminer l´affixe z_D du point D et montrer que le point E a pour affixe
$$z_E = \frac{1}{2}\left[1 + i\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$$
6) Montrer que $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$. Que pouvez-vous en déduire sur la nature du triangle OEB.

Exercice 3 (2018)

QCM - Les questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Noter sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie et donner la justification de cette réponse. Une bonne réponse non justifiée ne rapportera que 0,25 point.

1) L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 + (6-i)z^2 + (25-6i)z - 25i = 0$ est:
    a) $\{i;\ -3+4i\}$
    b) $\{i;\ -3+4i;\ -3-4i\}$
    c) $\{-i;\ -3+4i;\ -3-4i\}$
    d) $\{i;\ -3+8i;\ -3-8i\}$
2) Soit le nombre complexe $z = \frac{-3}{1-i}$.
    a) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$
    b) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$
    c) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
    d) $z = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$
3) Soit le nombre complexe $z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^{10}$.
    a) $\frac{-2\pi}{3}$ est un argument de z
    b) $\frac{2\pi}{3}$ est un argument de z
    c) $\frac{-\pi}{3}$ est un argument de z
    d) $\frac{\pi}{3}$ est un argument de z
4) Dans le plan complexe on donne le point C d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ est :
    a) $z' = i\,z + i - 1$
    b) $z' = -i\,z + i + 1$
    c) $z' = -i\,z + i - 1$
    d) $z' = z + i$
5) À tout nombre complexe $z \neq 3$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{z+5i}{z-3}$.
    L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est :
    a) Un cercle de rayon 1.
    b) Une droite privée d'un point.
    c) Un cercle privé d'un point.
    d) Une droite.

Exercice 4 (2018)

PARTIE A

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 4\,z^2 + 48\,z + 320$, où z est un nombre complexe.

1) Calculer $P(-4)$.
   Interpréter le résultat.
2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on a:
$$P(z) = (z + 4)(a\,z^2 + b\,z + c).$$
3) En déduire les solutions de l´équation $P(z) = 0$.

PARTIE B

Le plan complexe est muni d´un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d´unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B et C d´affixes respectives:
$$z_A = 4 + 8i,\ z_B = -4 \text{ et } z_C = 4 - 8i\ .$$

1) Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l´exercice.
2) Calculer le module et un argument du quotient $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
3) Donner leurs interprétations géométriques.
   En déduire la nature du triangle ABC.
4) Soit F l´image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   Déterminer l´affixe z_F du point F.
5) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCF$.

8. Une Maturita écrite de 2012

Exercice 1

Exercice

QCM - Pour chacune des questions ci-dessous, exactement une réponse est correcte. Noter sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie et donner la justification de cette réponse. Chaque bonne réponse avec la justification rapporte 0,75 point, chaque bonne réponse sans justification rapporte 0,25 point, l'absence de réponse ou une réponse fausse vaut 0 point.

Les questions sont indépendantes.

Dans les questions suivantes le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe ; une solution de l'équation $2z+\bar{z}=9+i$ est :

   a) 3 b) i c) $3+i$ d) aucune réponse correcte

2. Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

   a) $|i\bar{z}+1|$ b) $|z-1|$ c) $|z|+1$ d) aucune réponse correcte

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

   a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$ d) aucune réponse correcte

4. Soit n un nombre naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

   a) $n=3$ b) $n=6k+3, k\in\mathbb{N}$ c) $n=6k, k\in\mathbb{N}$ d) aucune réponse correcte

5. Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i|=|z+1|$ est :

   a) la droite (AB) b) le cercle de diamètre $[AB]$

   c) la droite perpendiculaire à (AB) passant par O d) aucune réponse correcte

6. Soient A et B deux points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

   a) $1-4i$ b) $-3i$ c) $7+4i$ d) aucune réponse correcte

9. Coniques

Exercice 1

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 3z\bar{z} - z^2 - 4z$.
On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, x', y et y' des nombres réels.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer l'ensemble (F) des points des M d'affixe z tels que z' soit un réel.
3. Démontrer que l'ensemble (G) des points des M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur est une conique dont on déterminera l'équation réduite et la nature.
4. Représenter sur une même figure les ensembles (F) et (G).

Solution de l'exercice 1

1.
$$\begin{aligned} z' &= 3z\bar{z} - z^2 - 4z = 3(x+iy)(x-iy) - (x+iy)^2 - 4(x+iy) \\ &= 3x^2 - 3i^2y^2 - x^2 - 2ixy - i^2y^2 - 4x - 4iy = 2x^2 - 4x + 4y^2 + i(-2xy - 4y) \end{aligned}$$
$x' = 2x^2 - 4x + 4y^2$
$y' = -2xy - 4y$

2.
z' est un réel $\Leftrightarrow y' = 0$
$\Leftrightarrow -2xy - 4y \Leftrightarrow y(-2x-4) = 0$
$\Leftrightarrow y = 0 \quad ou \quad -2x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow y = 0 \quad ou \quad x = -2$
(F) est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ et de la droite d'équation $x = -2$.

3.
z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 2y^2 = 1$
$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$
(G) est l'ellipse de centre $\Omega(1;0)$ d'axe focal (Ωx) avec $a^2 = 1$ et $b^2 = \frac{1}{2}$.
$$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
Dans $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$, de sommets principaux $A(1;0)$ et $A'(-1;0)$
de sommets secondaires $B(0;\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $B'(0;\frac{-\sqrt{2}}{2})$
de foyers $F(\frac{\sqrt{2}}{2};0)$ et $F'(\frac{-\sqrt{2}}{2};0)$.

Exercice 2

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On appelle s la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = 2\bar{z}^2 - 3z^2 + z - \frac{5}{2}$.
On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, x', y et y' des nombres réels.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer l'ensemble (F) des points des M d'affixe z tels que z' soit un réel.
3. Démontrer que l'ensemble (G) des points des M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur est une conique dont on déterminera l'équation réduite et la nature.
4. Représenter sur une même figure les ensembles (F) et (G).

Solution de l'exercice 2

1.

$$\begin{aligned} z' &= 2\bar{z}^2 - 3z^2 + z - \frac{5}{2} = 2(x - iy)^2 - 3(x + iy)^2 + (x + iy) - \frac{5}{2} \\ &= 2x^2 + 2i^2y^2 - 4xiy - 3x^2 - 3i^2y^2 - 6xiy + x + iy - \frac{5}{2} \\ &= -x^2 + x + y^2 - \frac{5}{2} + i(-10xy + y) \end{aligned}$$

$$x' = -x^2 + x + y^2 - \frac{5}{2}$$

$$y' = -10xy + y$$

2.

z' est un réel $\Leftrightarrow y' = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -10xy + y = 0 \\ &\Leftrightarrow y(-10x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \quad ou \quad -10x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \quad ou \quad x = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

(F) est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ et de la droite d'équation $x = \frac{1}{10}$.

3.

z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow -x^2 + x + y^2 - \frac{5}{2} = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 - x - y^2 + \frac{5}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\frac{5}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{-\frac{9}{4}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \end{aligned}$$

(G) est l'hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};0\right)$ d'axe focal (Ωy) avec $a^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ et $b^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{18}{4} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Dans $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$, de sommets principaux $A(0;\frac{3}{2})$ et $A'(0;\frac{-3}{2})$

de sommets secondaires $F(0;\frac{3\sqrt{2}}{2})$ et $F'(0;\frac{-3\sqrt{2}}{2})$

d'asymptotes d'équations $Y = X$ et $= -X$.

10. Similitudes directes

Théorème: Une transformation du plan est une similitude directe
si et seulement si
son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété:

Quand $a = 1$, la similitude directe est la translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe b;
Son élément caractéristique: $\vec{t}(b)$.

Quand $a \neq 1$, la similitude directe est la composée de la rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$
et d'angle θ qui est égal à l'argument principal de a
suivie de l'homothétie de centre Ω et de raport k qui est égal au module de a,
(ou alors l'inverse: l'homothétie suivie de la rotation, ce qui est équivalent);
Ses éléments caractéristiques: Ω, θ, k.

Preuve de la propriété :

CAS $a = 1$:

$z' = z + b$

La similitude directe est la translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe b.

CAS $a \neq 1$:

Posons $a = ke^{i\theta}$ et $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.

$$y - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow y = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$$

$$\begin{aligned} z' - z_\Omega = k(y - z_\Omega) &\Leftrightarrow z' = k(y - z_\Omega) + z_\Omega \\ &\Leftrightarrow z' = k\left(e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega - z_\Omega\right) + z_\Omega \\ &\Leftrightarrow z' = ke^{i\theta}z - ke^{i\theta}z_\Omega + z_\Omega \\ &\Leftrightarrow z' = a\,z - a\frac{b}{1-a} + \frac{b}{1-a} \\ &\Leftrightarrow z' = a\,z - \frac{b(1-a)}{1-a} \\ &\Leftrightarrow z' = a\,z - b \end{aligned}$$

La similitude directe est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle θ suivie de l'homothétie de centre Ω et de raport k.

De manière similaire, on peut prouver que la similitude directe est la composée de l'homothétie de centre Ω et de raport k suivie de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

c.q.f.d.

Exercice 1

Donner les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $z' = -z + 4 + 2i$

b) $z' = z - 3 + 2i$

c) $z' = (1 + i)z$

d) $z' = (-3 - 3i)z - 7 + i$

e) $z' = 2z + 3 - 2i$

f) $z' = -2\sqrt{3}\, i\, z + 3 + 6\sqrt{3}\, i$

Exercice 2

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation r qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = i\,z - 1 - 5i$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r.
2. Placer le point $A(1 - 2i)$ et son image A' par r dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
3. Donner une équation de l'image par r du cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{3}$.

Exercice 3

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation s qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \left(-2 - 2\sqrt{3}\,i\right)z + 6 + 4\sqrt{3}\,i$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.
2. Placer le point $A(-2+i)$ et son image A' par s dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
3. Donner une équation de l'image par s du cercle (C) de centre A et de rayon 2.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On appelle s la transformation qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y - 2 \\ y' = 2x + 2y + 1 \end{cases}$$

1. En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, déterminer z' en fonction de z.
2. Montrer que s est une similitude plane directe et déterminer ses éléments caractéristiques.

Solutions

Ex. 1:

a) $k = 1; \theta = \pi; \Omega(2+i)$; rem.: c'est une rotation d'angle θ et de centre Ω.
b) $\vec{t}(-3+2i)$; rem.: c'est une translation de vecteur $\vec{t}$.
c) $k = \sqrt{2}; \theta = \frac{\pi}{4}; \Omega(0)$; rem.: c'est une similitude directe de rapport k, d'angle θ et de centre Ω.
d) $k = 3\sqrt{2}; \theta = \frac{-3\pi}{4}; \Omega(-1+i)$; rem.: c'est une similitude directe de rapport k, d'angle θ et de centre Ω.
e) $k = 2; \theta = 0; \Omega(-3+2i)$; rem.: c'est une homothétie de rapport k et de centre Ω.
f) $k = 2\sqrt{3}; \theta = \frac{-\pi}{2}; \Omega(3)$; rem.: c'est une similitude directe de rapport k, d'angle θ et de centre Ω.

Ex. 2:

1. $k = 1; \theta = \frac{\pi}{2}; \Omega(2-3i)$; r est une rotation d'angle θ et de centre Ω.
2. $z_A = 1 - 4i$
3. $(C): (x-1)^2 + (y+4)^2 = 3$

Ex. 3:

1. $k = 4; \theta = \frac{-2\pi}{3}; \Omega(2)$; s une similitude directe de rapport k, d'angle θ et de centre Ω.
2. $z_A = 10 + 2\sqrt{3} + \left(-2 + 8\sqrt{3}\right)i$
3. $(C): \left(x - \left(10 + 2\sqrt{3}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-2 + 8\sqrt{3}\right)\right)^2 = 64$

Ex. 4:

1. $z' = (2 + 2\,i)z - 2 + \,i$
2. $k = 2\sqrt{2}; \theta = \frac{\pi}{4}; \Omega(-i)$; s une similitude directe de rapport k, d'angle θ et de centre Ω.

11.Formules d'Euler et linéarisation

Exercices à faire avec le professeur.

Exercice 1 (de théorie)

Sachant que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$, déduisez les formules d'Euler:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

Résolution

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) &= \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos(\theta) - i\sin(\theta)) = \frac{1}{2}(2\cos\theta) \\
&= \cos\theta. \\
\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) &= \frac{1}{2i}\big(\cos\theta + i\sin\theta - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))\big) \\
&= \frac{1}{2i}\big(\cos\theta + i\sin\theta - (\cos(\theta) - i\sin(\theta))\big) \\
&= \frac{1}{2i}(\cos\theta + i\sin\theta - \cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&= \frac{1}{2i}(2i\sin\theta) \\
&= \sin\theta.
\end{aligned}$$

Exercice 2

a) A l'aide des formules d'Euler et la formule du binôme de Newton, linéariser les expressions suivantes: $cos^3(x)\,cos(2x)$.

b) En déduire le calcul de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^3(x)\,cos(2x)\,dx$

Résolution

a)

$$\begin{aligned} cos^3(x) &= (\cos x)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(C_3^0\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^0 + C_3^1\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^1 + C_3^2\left(e^{ix}\right)^1\left(e^{-ix}\right)^2 + C_3^3\left(e^{ix}\right)^0\left(e^{-ix}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(1e^{i3x}1 + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + 1.1.\,e^{-i3x}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right) \end{aligned}$$

$$cos(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)$$

$$\begin{aligned} cos^3(x)\,cos(2x) &= \frac{1}{8}\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\frac{1}{2}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{i5x}+3e^{i3x}+3e^{ix}+e^{-ix}+e^{ix}+3e^{-ix}+3e^{-i3x}+e^{-i5x}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2} + 3\,\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} + 4\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}(\cos(5x) + 3\cos(3x) + 4\cos x) \end{aligned}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^3(x)\,cos(2x)\,dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{8}(\cos(5x) + 3\cos(3x) + 4\cos x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{8}\left(\frac{\sin(5x)}{5} + \sin(3x) + 4\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{\sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)}{5} + \sin\left(3\frac{\pi}{4}\right) + 4\sin\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 0}{5} + \sin 0 + 4\sin 0\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 = \frac{1}{8}\left(\frac{-\sqrt{2}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}\right)\frac{1}{8} \quad \frac{24\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

Exercice 3

a) A l'aide des formules d'Euler et la formule du binôme de Newton, linéariser les expressions suivantes: $cos(6x)\ \ sin^3(2x)$.

b) En déduire le calcul de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos(6x)\ \ sin^3(2x)\, dx$

Résolution

a)

$$cos(6x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{i6x} + e^{-i6x}\right)$$

$$\begin{aligned}
sin^3(2x) &= \left(sin(2x)\right)^3 = \left(\tfrac{1}{2i}\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)\right)^3 = \tfrac{1}{8i^3}\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)^3 = \tfrac{-1}{8i}\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)^3 \\
&= \frac{-1}{8i}\Big(C_3^0\left(e^{i2x}\right)^3\left(-e^{-i2x}\right)^0 + C_3^1\left(e^{i2x}\right)^2\left(-e^{-i2x}\right)^1 + C_3^2\left(e^{i2x}\right)^1\left(-e^{-i2x}\right)^2 \\
&\qquad + C_3^3\left(e^{i2x}\right)^0\left(-e^{-i2x}\right)^3\Big) \\
&= \frac{-1}{8i}\left(1e^{i6x}1 + 3e^{i4x}\left(-e^{-i2x}\right) + 3e^{i2x}e^{-i4x} + 1.1.\left(-e^{-i6x}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{8i}\left(e^{i6x} - 3e^{i2x} + 3e^{-i2x} - e^{-i6x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cos(6x)\ \ sin^3(2x) &= \tfrac{1}{2}\left(e^{i6x} + e^{-i6x}\right)\tfrac{-1}{8i}\left(e^{i6x} - 3e^{i2x} + 3e^{-i2x} - e^{-i6x}\right) \\
&= \tfrac{-1}{16i}\left(e^{i12x} - 3e^{i8x} + 3e^{i4x} - 1 + 1 - 3e^{-i4x} + 3e^{-i8x} - e^{-i12x}\right) \\
&= \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{e^{i12x} - e^{-i12x}}{2i} + 3\,\tfrac{e^{i8x} - e^{-i8x}}{2i} - 3\,\tfrac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(-\sin(12x) + 3\sin(8x) - 3\sin(4x)\right)
\end{aligned}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos(6x)\ \ sin^3(2x)\, dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{8}\left(-\sin(12x) + 3\sin(8x) - 3\sin(4x)\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{8}\left(\frac{\cos(12x)}{12} - \frac{3\cos(8x)}{8} + \frac{3\cos(4x)}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{\cos\left(12\frac{\pi}{3}\right)}{12} - \frac{3\cos\left(8\frac{\pi}{3}\right)}{8} + \frac{3\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right)}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\cos(0)}{12} - \frac{3\cos(0)}{8} + \frac{3\cos(0)}{4}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12} - \frac{3\frac{-1}{2}}{8} + \frac{3\frac{-1}{2}}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12} - \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{16} - \frac{3}{8}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12} - \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{16} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}\,\frac{-9}{16} = \frac{-9}{128}
\end{aligned}$$

Exercices à faire seul.

Exercice 4

a) A l'aide des formules d'Euler et la formule du binôme de Newton, linéariser les expressions suivantes: $cos^3(2x)\ cos(5x)$.

b) En déduire le calcul de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(2x)\ cos(5x)\ dx$

Exercice 5

a) A l'aide des formules d'Euler et la formule du binôme de Newton, linéariser les expressions suivantes: $cos(2x)\ \ sin^3(4x)$.

b) En déduire le calcul de l'intégrale : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(2x)\ \ sin^3(4x)\ dx$

Solutions

Ex.4: a) $cos^3(2x)\ cos(5x) = \frac{1}{8}(\cos(11x) + 3\cos(7x) + 3\cos(3x) + \cos x)$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(2x)\ cos(5x)\ dx = \frac{-5}{77}$

Ex.5: a) $cos(2x)\ \ sin^3(4x) = \frac{1}{8}\left(-\sin(14x) - \sin(10x) + 3\sin(6x) + 3\sin(2x)\right)$

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(2x)\ \ sin^3(4x)\ dx = \frac{-16}{35}$

12.Equations trigonométriques

Propriété

Soit $(A;B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(A;B) \neq (0;0)$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\cos x + B\sin x$.
Alors : $f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta - x)$ où $\theta = \arg(A + B\,i)$

Preuve

Posons $z = A + B\,i$.
Soit θ un argument de z.
$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\cos\theta + i\,|z|\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\cos\theta + i\sqrt{A^2+B^2}\sin\theta$
$A = \sqrt{A^2+B^2}\cos\theta$
$B = \sqrt{A^2+B^2}\sin\theta$
$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\theta\cos x + \sqrt{A^2+B^2}\sin\theta\sin x$
$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x)$
$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta - x)$
c.q.f.d.

Exercice 1

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.
2) En déduire les solutions de l'équation $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1$ dans $\mathbb{R}$.
3) En déduire les solutions de l'équation $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1$ dans $[0; 2\pi]$.

Solution

1)

Soit $z = \sqrt{3} + 1i$.

$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$\sqrt{3} + 1i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + i\,2\sin\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3} = 2\cos\frac{\pi}{6}$ et $1 = 2\sin\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x &= 2\cos\tfrac{\pi}{6}\cos 2x + 2\sin\tfrac{\pi}{6}\sin 2x = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\tfrac{\pi}{6}\sin 2x\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1 \quad &\text{ssi} \quad 2\cos\left(\tfrac{\pi}{6} - 2x\right) = 1\\ &\text{ssi} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{6} - 2x\right) = \tfrac{1}{2}\\ &\text{ssi} \quad \tfrac{\pi}{6} - 2x = \tfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \text{ ou } \tfrac{\pi}{6} - 2x = \tfrac{-\pi}{3} + k\,2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\\ &\text{ssi} \quad -2x = \tfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \text{ ou } -2x = \tfrac{-3\pi}{6} + k\,2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\\ &\text{ssi} \quad 2x = \tfrac{-\pi}{6} - k\,2\pi \text{ ou } 2x = \tfrac{\pi}{2} - k\,2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\\ &\text{ssi} \quad 2x = \tfrac{-\pi}{6} + k\,2\pi \text{ ou } 2x = \tfrac{\pi}{2} + k\,2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\\ &\text{ssi} \quad x = \tfrac{-\pi}{12} + k\,\pi \text{ ou } = \tfrac{\pi}{4} + k\,\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$S = \left\{\frac{-\pi}{12} + k\,\pi\ |k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\,\pi\ |k \in \mathbb{Z}\right\}$

3)

$S = \left\{\frac{11\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

13.Equation du second degré à coefficients complexes

Exercice 1 - Cas où le discriminant n'est pas un réel

Factoriser P et ensuite résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

1) $P(z) = z^2 - (3+2i)z + 5 + i$
2) $P(z) = i\,z^2 + (1-5i)z + 6i - 2$
3) $P(z) = (1+i)\,z^2 - 3z + 2 - i$

Solutions

1) Factorisation de P:

$P(z) = z^2 - (3+2i)z + 5 + i.$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = \left(-(3+2i)\right)^2 - 4(1)(5+i) = 9 + 12i + 4i^2 - 20 - 4i = -15 + 8i.$

$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

où $z_1 = \frac{-b+\psi}{2\,a}$ et $z_2 = \frac{-b-\psi}{2\,a}$ avec $\psi^2 = \Delta$ et l'argument principal de ψ appartient à $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculons ψ.

Soit x et y deux réels tels que $(x+iy)^2 = \Delta$.

$(x+iy)^2 = x^2 + 2\,x\,iy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i\,(2\,x\,y)$

d'où $x^2 - y^2 = -15$ et $2\,x\,y = 8$.

$$\begin{aligned}
|(x+iy)^2| &= |(x^2-y^2) + i\,(2\,x\,y)| = \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2\,x\,y)^2} \\
&= \sqrt{(x^2)^2 + (y^2)^2 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{(x^2)^2 + (y^2)^2 + 2x^2y^2} \\
&= \sqrt{(x^2+y^2)^2} = (x^2+y^2)
\end{aligned}$$

d'où $x^2 + y^2 = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17.$

On a donc: $\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 & \text{(E1)} \\ 2\,x\,y = 8 & (E2) \\ x^2 + y^2 = 17 & (E3) \end{cases}$.

$\text{(E1)} + \text{(E3)}: 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

$\text{(E3)} - \text{(E1)}: 2y^2 = 32 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4.$

Comme $2\,x\,y = 8$, on a que x et y sont de même signe et donc: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$.

$\psi = 1 + 4i$ car l'argument principal de ψ appartient à $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$z_1 = \frac{-\left(-(3+2i)\right) + (1+4i)}{2(1)} = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$$

$$z_2 = \frac{-\left(-(3+2i)\right) - (1+4i)}{2(1)} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2) = \left(z - (2+3i)\right)\left(z - (1-i)\right)$

Résolution de l'équation $P(z) = 0$:

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 &\Leftrightarrow a(z - z_1)(z - z_2) = 0 \Leftrightarrow z - z_1 = 0 \;\; ou \;\; z - z_2 = 0 \Leftrightarrow z = z_1 \;\; ou\, z = z_2 \\
&\Leftrightarrow z = 2 + 3i \;\; ou \;\; z = 1 - i.
\end{aligned}$$

$S = \{2 + 3i; 1 - i\}.$

2) $S = \{2; 3 + i\}$
3) $S = \left\{1; \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right\}$

Exercice 2 - Cas où le discriminant est un réel

Factoriser P et ensuite résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans dans $\mathbb{C}$.

1) $P(z) = i\, z^2 - (3 + 2i)\, z + 3$ (ici $\Delta > 0$)
2) $P(z) = -z^2 + 2iz + 1$ (ici $\Delta = 0$)
3) $P(z) = 5i\, z^2 + (3 + 5i)z + \frac{3}{2}$ (ici $\Delta < 0$)
4) $P(z) = -13\, z^2 + i\, z + \frac{1}{2}$ (ici $\Delta > 0$)
5) $P(z) = \left(1 - \frac{3}{4}i\right)\, z^2 + (3 - i)\, z + 2$ (ici $\Delta = 0$)
6) $P(z) = -5i\, z^2 + 4\, z + i$ (ici $\Delta < 0$).

Solutions

1) Factorisation de P:

$P(z) = i\,z^2 - (3+2i)\,z + 3.$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = \big(-(3+2i)\big)^2 - 4(i)(3) = 9 + 12i + 4i^2 - 12i = 9 - 4 = 5.$

$\Delta = \sqrt{5}.$

$z_1 = \frac{-(-(3+2i))+\sqrt{5}}{2(i)} = \frac{3+\sqrt{5}+2i}{2i} \times \frac{i}{i} = \frac{i(3+\sqrt{5})+2i^2}{2i^2} = \frac{-2+i(3+\sqrt{5})}{-2} = \quad = 1 - i\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

$z_2 = \frac{-(-(3+2i))-\sqrt{5}}{2(i)} = 1 - i\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

$P(z) = a(z-z_1)(z-z_2) = i\left(z - \left(1 - i\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(z - \left(1 - i\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right).$

Résolution de l'équation $P(z) = 0$:

$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow a(z-z_1)(z-z_2) = 0 \Leftrightarrow z - z_1 = 0 \;\; ou \;\; z - z_2 = 0 \Leftrightarrow z = z_1 \;\; ou\; z = z_2$

$\Leftrightarrow z = 1 - i\,\frac{3+\sqrt{5}}{2} \;\; ou\; z = 1 - i\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

$S = \left\{1 - i\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1 - i\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}.$

2) Factorisation de P:

$P(z) = -z^2 + 2iz + 1$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 4i^2 - 4(-1)(1) = -4 + 4 = 0$

$z_1 = z_2 = \frac{-2i+0}{2(-1)} = i$

$P(z) = a(z-z_1)(z-z_2) = -(z-i)(z-i) = -(z-i)^2.$

Résolution de l'équation $P(z) = 0$:

$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow -(z-i)^2 = 0 \Leftrightarrow z - i = 0 \quad \Leftrightarrow z = i.$

$S = \{i\}.$

3) Factorisation de P:

$P(z) = 5i\,z^2 + (3+5i)z + \frac{3}{2}.$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = (3+5i)^2 - 4(5i)\left(\frac{3}{2}\right) = 9 + 30i + 25i^2 - 30i = -16 = 4^2 i^2 = (4i)^2.$

$z_1 = \frac{-(3+5i)+4i}{2(5i)} = \frac{-3-i}{10i} \times \frac{i}{i} = \frac{-3i-i^2}{10i^2} = \frac{1-3i}{-10} = \quad = \frac{-1}{10} + i\,\frac{3}{10}.$

$z_2 = \frac{-(3+5i)-4i}{2(5i)} = \frac{-3-9i}{10i} \times \frac{i}{i} = \frac{-3i-9i^2}{10i^2} = \frac{9-3i}{-10} = \quad = \frac{-9}{10} + i\,\frac{3}{10}.$

$P(z) = a(z-z_1)(z-z_2) = 5i\left(z - \left(\frac{-1}{10} + i\,\frac{3}{10}\right)\right)\left(z - \left(\frac{-9}{10} + i\,\frac{3}{10}\right)\right).$

Résolution de l'équation $P(z) = 0$:

$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow a(z-z_1)(z-z_2) = 0 \Leftrightarrow z - z_1 = 0 \;\; ou \;\; z - z_2 = 0 \Leftrightarrow z = z_1 \;\; ou\; z = z_2$

$\Leftrightarrow z = \frac{-1}{10} + i\,\frac{3}{10} \;\; ou\; z = \frac{-9}{10} + i\,\frac{3}{10}.$

$S = \left\{\frac{-1}{10} + i\,\frac{3}{10}; \frac{-9}{10} + i\,\frac{3}{10}\right\}.$

4) $P(z) = -13\left(z - \left(\frac{-5}{26} + i\,\frac{1}{26}\right)\right)\left(z - \left(\frac{5}{26} + i\,\frac{1}{26}\right)\right); S = \left\{\frac{-5}{26} + i\,\frac{1}{26}; \frac{5}{26} + i\,\frac{1}{26}\right\}$

5) $P(z) = \left(1 - \frac{3}{4}i\right)\left(z - \left(\frac{-6}{5} - i\,\frac{2}{5}\right)\right)^2; S = \left\{\frac{-6}{5} - i\,\frac{2}{5}\right\}$

6) $P(z) = -5i\left(z - \left(\frac{-1}{5} - i\,\frac{2}{5}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{5} - i\,\frac{2}{5}\right)\right); S = \left\{\frac{-1}{5} - i\,\frac{2}{5}; \frac{1}{5} - i\,\frac{2}{5}\right\}$